Une classification des opérateurs de Monge-Ampère symplectiques en dimension 3

Bertrand BANOS*
Département de Mathématiques,
Université d'Angers
2, bd Lavoisier, 49045 Angers, France

Résumé. Nous complétons la liste des formes normales des 3-formes effectives par rapport à l'action naturelle des symplectomorphismes de $\mathbb{R}^6$ et mettons en évidence la 3-forme associée à l'équation de Monge-Ampère spéciale lagrangienne. Nous calculons les algèbres de symétrie de ces différentes formes normales et leurs prolongations de Cartan et établissons une classification locale des équations de Monge-Ampère correspondantes.

A classification of symplectic Monge-Ampère operators in the dimension 3

Abstract. We accomplish the list of normal forms for effective 3-forms with constant coefficients with respect to the naturel action of symplectomorphisms in $\mathbb{R}^6$. We show that the 3-form which correspond to the Special Lagrangian equation is among the new members of the classification. The symplectic symetry algebras and their Cartan prolongations for these forms are computed and the local classification theorem for the corresponding Monge-Ampère equations is proved.

Un problème classique de la théorie géométrique des équations différentielles est le problème d'équivalence locale: deux équations différentielles données sont elles l'expression de la même équation différentielle à réecriture des variables indépendantes et dépendantes près?

Un cas particulier de ce problème d'équivalence est le problème de linéarisation d'une équation différentielle: quand est-ce qu'une équation différentielle est équivalente à une équation différentielle linéaire? Une classe très naturelle pour ce problème des équations différentielles du second ordre non linéaires est celle des équations de Monge-Ampère. Sophus Lie posait en 1874 le problème de la linéarisation de ces équations en dimension deux, et ce problème fut discuté dans plusieurs articles classiques de G. Darboux et E. Goursat notamment et dans nombre d'articles contemporains.

Une approche géométrique moderne de l'étude des équations de Monge-Ampère a été proposée par V. Lychagin ([7]) (à partir d'une idée d'E. Cartan) et appliquée au problème de classification par V. Lychagin et V. Roubtsov dans les articles [8], [9] et [10]. Dans l'article [8] plusieurs résultats de classification des équations de Monge-Ampère généralisées ont été obtenu. V. Lychagin et V. Roubtsov ont obtenus des classifications presques complètes pour deux et trois variables indépendantes et des

*banos@tonton.univ-angers.fr

classifications partielles en dimension supérieure. Le but principal de cet article est de préciser et compléter leur liste des formes normales des équations de Monge-Ampère en dimension trois. Nous obtenons une classification locale complète des équations de Monge-Ampère en dimension trois par rapport à l'action du groupe des symplectomorphismes.

Comme il l'avait été remarqué dans [8], la question de classification des équations de Monge-Ampère en dimension trois contient un sous problème de la Théorie des Invariants Géométriques d'un intérêt indépendant: le problème de la classification symplectique des trivecteurs sur un espace vectoriel réel de dimension six. Une classification des trivecteurs sur un espace complexe à été obtenue par J.I. Igusa ([6]) et V. Popov ([11]) mais ne peut pas être utilisée ici car $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos.

Une équation de Monge-Ampère à trois variables et à coefficients constants particulière a sucité beaucoup d'intérêt après le célèbre article de R. Harvey et H.B Lawson sur les géométries calibrées. Il s'agit de l'équation

$$hess(h) - \Delta(h) = 0$$

(où $hess(h)$ est le déterminant de la matrice hessienne de h et Δ est l'opérateur de Laplace) qui est une condition nécessaire et suffisante pour que le graphe de ∇h soit une surface spéciale lagrangienne. L'absence de cette équation parmis les formes normales de V. Lychagin et V. Roubtsov a motivé cet article.

En reprenant les calculs de V. Lychagin et V. Roubtsov, nous trouvons deux formes normales complémentaires dont la forme spéciale lagrangienne, nous calculons ensuite l'invariant symplectique correspondant, l'algèbre des stabilisateurs (ou algèbre des symétries) et sa prolongation de Cartan puis par des arguments similaires à ceux de V. Lychagin et V. Roubtsov nous montrons un théorème de classification des équations de Monge-Ampère en dimension trois. Voici brièvement la structure de cet article:

Dans la première partie nous rappelons l'approche de V. Lychagin des équations de Monge-Ampère par les formes effectives sur l'espace des 1-jets et formulons le problème de classification.

La deuxième partie est consacrée à la classification symplectique des trivecteurs primitifs, dits effectifs, sur un espace réel de dimension six. Ceete classification est effectuée en ramenant le problème en dimension quatre grâce à un invariant symplectique introduit dans [8]. Nous étudions tous les cas possibles, aussi cette partie est elle un peu technique bien que n'utilisant que des outils d'algèbre linéaire symplectique. Le théorème 2.9 est le résultat principal de cette partie.

Dans la troisième partie nous calculons les stabilisateurs des différentes orbites et leurs prolongations. Nous identifions explicitement ces stabilisateurs comme des sous algèbres de Lie classiques de $sp(6)$. Les résultats sont résumés dans la table 3.

Dans la dernière partie nous utilisons ces résultats pour établir une classification symplectique locale des équations de Monge-Ampère à coefficients constants en dimension trois (théorème 4.4). Ici nous adaptons les résultats de V. Lychagin et V. Roubtsov à notre cas un peu moins général.

Nous reprenons les notations de [8] sans y faire référence systématiquement.

Cet article a pour point de départ mon mémoire de DEA soutenu à l'école doctorale de Nantes-Angers et fait partie de la thèse que je prépare à l'université d'Angers sous la direction de V. Roubtsov. Je le remercie de m'avoir proposé ce problème et de toute l'aide qu'il m'a apporté pendant ce travail.

1 Formulation du problème

Considérons un espace vectoriel symplectique (V, Ω) de dimension $2n$ et notons $\Gamma : V \to V^*$ l'isomorphisme induit par Ω. Soit $X_\Omega \in \Lambda^2(V)$ l'unique bivecteur tel que $\Gamma^2(X_\Omega) = \Omega$ où $\Gamma^2 : \Lambda^2(V) \to \Lambda^2(V^*)$ est la puissance extérieure de Γ.

Introduisons les opérateurs $\perp : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-2}(V^*)$, $\omega \mapsto i_{X_\Omega}$ et $\top : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k+2}(V^*)$, $\omega \mapsto \omega \wedge \Omega$. Les opérateurs $\perp$ et $\top$ vérifient la propriété suivante:

$$[\perp, \top](\omega) = (n-k)\omega \ \forall\, \omega \in \Lambda^k(V^*)$$

Ce qui permet de vérifier que pour $k \geq 0$:

$$\begin{cases} \perp : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-2}(V^*) \text{ est injective pour } k \geq n+1 \\ \top : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k+2}(V^*) \text{ est injective pour } k \leq n-1 \end{cases}$$

Une k-forme extérieure ω sera dite effective si $\perp\omega = 0$. Si $k = n$, ω est effective si et seulement si $\omega \wedge \Omega = 0$.

Considérons maintenant M une variété lisse de dimension n. Notons J^1M l'espace des 1- jets de M et pour $f \in C^\infty(M)$, $j^1(f) : M \to J^1M$, $x \mapsto [f]^1_x$. Rappelons que l'opérateur de Monge-Ampère $\Delta_\omega : C^\infty(M) \to \Lambda^n(M)$ associé à une n forme différentielle $\omega \in \Lambda^n(J^1M)$ est défini par

$$\Delta_\omega(f) = j_1(f)^*(\omega)$$

Soit U la forme de contact sur J^1M et X_1 le champ de Reeb. Soit pour $x \in M$, $C(x) = Ker(U_x)$. En tout point x de M, $(C(x), dU_x)$ est un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ et:

$$T_xJ^1M = C(x) \oplus \mathbb{R}X_{1x}$$

Ainsi $\Lambda(C^*)$ s'identifie canoniquement à $\Lambda(T^*M))$.

Le groupe $Ct(M)$ des difféomorphismes de contacts sur M agit naturellement sur l'ensemble des opérateurs de Monge-Ampère:

$$F(\Delta_\omega) = \Delta_{F^*(\omega)}$$

L'action infinitésimale associée étant:

$$X(\Delta_\omega) = \Delta_{L_X(\omega)}$$

Nous nous proposons d'établir une classification des opérateurs de Monge-Ampère en dimension 3 par rapport à l'action des transformations de contact. Plus précisément nous nous intéresserons aux opérateurs de Monge-Ampère symplectiques i.e. aux opérateurs vérifiant:

$$X_1(\Delta_\omega) = \Delta_{L_{X_1}}(\omega) = 0$$

autrement dit aux opérateurs Δ_ω caractérisés par $\omega \in \Lambda^n(T^*M)$. Un analogue symplectique du théorème de Hodge (le théorème dit de Hodge-Lepage) dit qu'une n-forme $\omega \in \Lambda^n(T^*M)$ se décompose en une somme finie:

$$\omega = \omega_0 + \perp\omega_1 + \perp^2\omega_2 + \ldots$$

les ω_i étant effectives et uniquement déterminées (voir par exemple [7]). De plus l'opérateur Δ_ω est uniquement déterminé par ω_0.

Dès lors classifier des opérateurs de Monge-Ampère symplectiques à coefficients constants en dimension $n = 3$ par rapport à l'action des transformations de contact revient à classifier les différentes orbites de l'action du groupe symplectique $Sp(6)$ sur l'ensemble des 3-formes effectives sur un espace vectoriel symplectique de dimension 6.

2 Classification symplectique des 3-formes effectives en dimension 3

Une base $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ d'un espace vectoriel symplectique (V, Ω) sera dite symplectique ou canonique si Ω s'écrit:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge f_i^*$$

La classification des 2-formes effectives en dimension 2 est bien connue:

PROPOSITION 2.1 *Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique de dimension 4 et $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ une 2-forme effective non nulle. Il existe une base symplectique (e_1, e_2, f_1, f_2) de V dans laquelle ω s'écrit:*

1. $\omega = \lambda(e_1^* \wedge f_2^* - e_2^* \wedge f_1^*)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *si ω est elliptique i.e.* $Pf(\omega) > 0$
2. $\omega = \lambda(e_1^* \wedge f_1^* - e_2^* \wedge f_2^*)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *si ω est hyperbolique i.e.* $Pf(\omega) < 0$
3. $\omega = e_1^* \wedge f_2^*$ *si ω est parabolique i.e.* $Pf(\omega) = 0$

où le pfaffien $Pf(\omega)$ de la 2-forme ω est l'invariant symplectique défini par $\omega^2 = Pf(\Omega)$.

Nous allons établir une classification similaire pour les 3-formes effectives en dimension 3. Considérons donc un espace vectoriel symplectique (V, Ω) de dimension 6. Nous noterons $\Lambda_\varepsilon(V^*)$ l'ensemble des formes effectives sur V et pour $\omega \in \Lambda^3(V^*)$ et $X \in V$:

$$\begin{cases} \theta_X = i_X\Omega \in \Lambda^1(V^*) \\ \omega_X = i_X\omega \in \Lambda^2(V^*) \\ E_X = Ker(\omega_X : V \to V^*) \end{cases}$$

2.1 L'invariant symplectique q_ω

V. Lychagin et V. Roubtsov ([8]) ont associé à ω la forme bilinéaire symétrique $q_\omega \in S^2(V^*)$ définie par:

$$q_\omega(X) = -\frac{1}{4}\perp^2 \omega_X^2$$

Cette forme bilinéaire caractérise en fait les racines du polynôme caractéristique $P_{\omega_X}(\lambda) = Pf(\omega_X - \lambda\Omega)$ de ω_X:

$$Pf_{\omega_X}(\lambda) = \lambda(\lambda - \sqrt{q_\omega(X)})(\lambda + \sqrt{q_\omega}(X))$$

De plus, puisque le pfaffien est un invariant symplectique, q_ω est un invariant symplectique: si $F \in Sp(6)$ alors:

$$q_{F^*\omega}(X) = q_\omega(FX)$$

Nous allons grâce à cet invariant caractériser ω par des 2-formes effectives sur des espaces de dimension 4 et ainsi décrire toutes les orbites possibles en dimension 3 à partir des différentes orbites en dimension 2.

LEMME 2.2 *Soit $X \in V$ et $Y \in E_X$:*

$$\begin{cases} \omega = \omega_Y \wedge \theta_X - \omega_X \wedge \theta_Y & si\ \Omega(X,Y) = 1 \\ \omega_Y \wedge \theta_X = \omega_X \wedge \theta_Y & si\ \Omega(X,Y) = 0 \end{cases}$$

Preuve

ω est effective donc $\omega \wedge \Omega = 0$. Dès lors $\omega_X \wedge \Omega = \omega \wedge \theta_X$. Et donc $i_Y(\omega_X \wedge \Omega) = i_Y(\omega \wedge \theta_X)$. D'où, puisque $Y \in E_X$:

$$\omega_X \wedge \theta_Y = \omega_Y \wedge \theta_X - \Omega(X,Y)\omega$$

□

LEMME 2.3 *Soit $X \in V$ tel que $q_\omega(X) \neq 0$. Alors E_X est de dimension 2.*

Preuve

Soit V' un supplémentaire de E_X. Puisque E_X est le noyau de ω_X, ω'_X est non dégénérée sur V' et donc V' est de dimension paire. Dès lors E_X est de dimension paire. De plus si ω_X s'annule sur plus de 3 vecteurs libres différents alors $\omega_X^2 = 0$. Donc si $q_\omega(X) \neq 0$ E_X est de dimension 0 ou 2. De plus $X \in E_X$ et $X \neq 0$ (puisque $\omega_X^2 \neq 0$) donc E_X est de dimension 2.

□

LEMME 2.4 *Soit $X \in V$ tel que $q_\omega(X) \neq 0$. Alors E_X n'est pas isotrope par rapport à Ω.*

Preuve

Supposons par l'absurde que E_X est isotrope. Soit $Y \in E_X$ tel que (X,Y) soit une base de E_X. (E_X est de dimension 2 d'après 2.3). Comme E_X est isotrope $\Omega(X,Y) = 0$. De plus d'après 2.2 $\omega_X \wedge \theta_Y = \omega_Y \wedge \theta_X$. Dès lors $i_X(\omega \wedge \theta_X \wedge \theta_Y) = i_Y(\omega \wedge \theta_X \wedge \theta_Y) = 0$. Donc $\omega \wedge \theta_X \wedge \theta_Y$ est une 5 - forme sur un espace de dimension 6 s'annulant sur deux vecteurs linéairement indépendants:

$$\omega \wedge \theta_X \wedge \theta_Y = 0$$

Soit $(\theta_X, \theta_Y, \theta_1, \ldots, \theta_4)$ une base de V^*. ω s'écrit:

$$\omega = \theta_X \wedge \omega_1 + \theta_Y \wedge \omega_2 + \theta_X \wedge \theta_Y \wedge \omega_3 + \omega_4$$

les ω_i étant combinaison des θ_j. Mais $\omega_4 \wedge \theta_X \wedge \theta_Y = \omega \wedge \theta_X \wedge \theta_Y = 0$. Donc $\omega_4 = 0$. Ainsi il existe ω'_1 et $\omega'_2 \in \Lambda^2(V^*)$ tels que:

$$\omega = \theta_X \wedge \omega'_1 + \theta_Y \wedge \omega'_2$$

Dès lors si on pose $\alpha = -i_X\omega'_1$ et $\beta = -i_X\omega'_2$ on a:

$$\begin{cases} \omega_X = \theta_X \wedge \alpha + \theta_Y \wedge \beta \\ \alpha(X) = \beta(X) = 0 \end{cases}$$

et:

$$\omega_X^2 = 2\theta_X \wedge \theta_Y \wedge \beta \wedge \alpha$$

Rappelons que pour $\theta \in \Lambda^1(V^*)$ et $\xi \in \Lambda^k(V^*)$ on a la relation:

$$\perp(\theta \wedge \xi) = \theta \wedge \perp\xi - i_{X_\theta}\xi$$

où $X_\theta \in V$ est défini par $i_{X_\theta}\Omega = \theta$. Dès lors:

$$\begin{aligned}
\perp(\omega_X^2) &= 2\theta_X \wedge \perp(\theta_Y \wedge \beta \wedge \alpha) - \underbrace{i_X(\theta_Y \wedge \beta \wedge \alpha)}_{=0} \\
&= 2\perp(\beta \wedge \alpha)\theta_X \wedge \theta_Y - 2\theta_X \wedge (\beta(Y)\alpha - \alpha(Y)\beta)
\end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned}
\perp^2(\omega_X^2) &= 2\perp(\beta \wedge \alpha)\perp(\theta_X \wedge \theta_Y) - 2\perp(\theta_X \wedge (\beta(Y)\alpha - \alpha(Y)\beta)) \\
&= -2\perp(\beta \wedge \alpha)\underbrace{i_X\theta_Y}_{=0} + 2\underbrace{i_X(\beta(Y)\alpha - \alpha(Y)\beta)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $q_\omega(X) = 0$: contradiction.

□

Ainsi 2 cas distincts se présentent: $q_\omega = 0$ et $q_\omega \neq 0$. Nous allons voir que dans le premier cas ω appartient à une seule orbite possible, et dans le deuxième cas nous pourrons utiliser (2.2) et (2.1) pour déterminer les différentes orbites possibles.

2.2 Formes dont la forme quadratique associée est nulle

PROPOSITION 2.5 *Soit $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(V_6^*)$ telle que $q_\omega = 0$ et $\omega \neq 0$. Il existe une base symplectique $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ de (V, Ω) dans laquelle ω s'écrit:*

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$$

Pour montrer cette proposition nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 2.6 *Soit W un espace vectoriel de dimension $p \geq 3$ et $\omega \in \Lambda^3(W^*)$ tel que pour tout $X \in W$, $\omega \wedge \omega_X = 0$. Alors il existe α, β et $\gamma \in \Lambda^1(V^*)$ tels que*

$$\omega = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$$

Preuve

Montrons ce lemme par récurrence sur $p = dim(W)$.

Pour $p = 3$ toute 3-forme se décompose en produit de 3 formes. Supposons maintenant le résultat vrai en dimension $p \geq 3$. Soit W de dimension $p+1$. Ecrivons $W = W_1 \oplus \mathbb{R}e$. ω s'écrit $\omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge e^*$ avec ω_1 et $\omega_2 \in \Lambda(W_1^*)$ et e^* la forme linéaire qui vaut 1 sur e et dont le noyau est W_1.

1. Supposons tout d'abord que $\omega_1 = 0$. Alors $\omega \wedge \omega_e = \omega_2^2 \wedge e^* = 0$. Donc $\omega_2^2 = 0$, ce qui est équivalent à $\omega_2 = \alpha \wedge \beta$ avec α et $\beta \in \Lambda^1(W^*)$. Et donc $\omega = \alpha \wedge \beta \wedge e^*$.

2. Supposons maintenant que $\omega_1 \neq 0$. Soit $X \in W_1$:

$$0 = \omega \wedge \omega_X = \omega_1 \wedge \omega_{1,X} + (\omega_1 \wedge \omega_{2,X} + \omega_2 \wedge \omega_{1,X}) \wedge e^*$$

Dès lors $\omega_1 \wedge \omega_{1,X} = 0$ pour tout $X \in W_1$. D'après l'hypothèse de récurrence $\omega_1 = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ avec (α, β, γ) famille libre de $\Lambda^1(W_1)^*$. Or:

$$0 = \omega \wedge \omega_e = -\alpha \wedge \beta \wedge \gamma - \omega_2^2 \wedge e^*$$

Donc $\omega_2^2 = 0$ et $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \omega_2 = 0$, i.e. $\omega_2 = \alpha_1 \wedge \beta_1$ et il existe $\lambda_1, \ldots \lambda_5 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma + \lambda_4 \alpha_1 + \lambda_5 \beta_1 = 0$$

λ_4 et λ_5 ne sont pas tous les deux nuls puisque α, β et γ sont linéairement indépendants. Par exemple supposons $\lambda_5 \neq 0$:

$$\beta_1 = a\alpha + b\beta + c\gamma + a_1\alpha_1$$

et donc:

$$\omega = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma + a\alpha_1 \wedge \alpha \wedge e^* + b\alpha_1 \wedge \beta \wedge e^* + c\alpha_1 \wedge \gamma \wedge e^*$$

α_1 s'écrit comme combinaison linéaire de α, β, γ et δ, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ étant libre. Dès lors:

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \\ &\quad + x\alpha \wedge \beta \wedge e^* + y\alpha \wedge \gamma \wedge e^* + z\alpha \wedge \delta \wedge e^* \\ &\quad + u\beta \wedge \gamma \wedge e^* + v\beta \wedge \delta \wedge e^* + w\gamma \wedge \delta \wedge e^*\end{aligned}$$

Soit (a, b, c, d) une famille préduale de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. De $\omega \wedge \omega_a = 0$ il vient $u = 0$, de $\omega \wedge \omega_b = 0$ il vient $v = 0$ et de $\omega \wedge \omega_c = 0$ il vient $w = 0$. D'où:

$$w = (\alpha + ze^*) \wedge (\beta - ye^*) \wedge (\gamma + xe^*)$$

□

Revenons à notre forme $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ vérifiant $q_\omega = 0$: pour tout X et Y dans V, $\perp^2(\omega_X \wedge \omega_Y) = 0$ et donc $\top\perp^2(\omega_X \wedge \omega_Y) = 0$. Mais $\top\perp^2(\omega_X \wedge \omega_Y) = \perp^2\top(\omega_X \wedge \omega_Y)$. Donc comme $\perp : \Lambda^6(V^*) \to \Lambda^4(V^*)$ et $\perp : \Lambda^4(V^*) \to \Lambda^2(V^*)$ sont injectives on en déduit que pour tout X et $Y \in V$ $\omega_X \wedge \omega_Y \wedge \Omega = 0$. Mais $\omega_X \wedge \Omega = \omega \wedge \theta_X$ puisque ω est effective. Donc pour tout X et $Y \in V$ $\theta_X \wedge \omega \wedge \omega_Y = 0$ et donc nécessairement pour tout $Y \in V$, $\omega \wedge \omega_Y = 0$. Dès lors d'après le lemme précédent ω s'écrit

$$\omega = \theta_{E_1} \wedge \theta_{E_2} \wedge \theta_{E_3}$$

Utilisons maintenant l'effectivité de ω pour montrer que E_1, E_2 et E_3 sont orthogonaux:

$$\begin{aligned}0 &= \perp(\omega) \\ &= \perp(\theta_{E_1} \wedge \theta_{E_2} \wedge \theta_{E_3}) \\ &= \Omega(E_2, E_3)\theta_{E_1} + \Omega(E_3, E_1)\theta_{E_2} + \Omega(E_1, E_2)\theta_{E_3}\end{aligned}$$

Comme θ_{E_1}, θ_{E_2} et θ_{E_3} sont linéairement indépendantes ($\omega \neq 0$) on en déduit que $\Omega(E_i, E_j) = 0$ ce qui achève la preuve de 2.5.

2.3 Formes dont la forme quadratique associée n'est pas nulle

Considérons maintenant $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ telle que $q_\omega \neq 0$. Soit $X \in V$ tel que $q_\omega(X) \neq 0$. D'après 2.3 et 2.4 il existe $Y_1 \in E_X$ tel que (X, Y_1) est une base de E_X et $\Omega(X, Y_1) = 1$. Soit $Y = Y_1 + tX$ avec $t = -\frac{q_\omega(X,Y_1)}{q_\omega(X)}$. (X, Y) est une base de E_X, $\Omega(X, Y) = 1$ et $q_\omega(X, Y) = 0$. Posons alors:

$$E_X^\perp = Ker(\theta_X) \cap Ker(\theta_Y)$$

Il est clair que $V = E_X \oplus E_X^\perp$ et que $(E_X^\perp, \Omega')$ et $(E_X^\perp, \omega'_X)$ sont des espaces symplectiques de dimension 4, le prime désignant la restriction à $E_X^\perp$. De plus comme ω est effective $\omega_X \wedge \Omega = \omega \wedge \theta_X$ et $\omega_Y \wedge \Omega = \omega \wedge \theta_Y$ donc $\omega'_X \wedge \Omega' = \omega'_Y \wedge \Omega' = 0$: Ω' est effective sur $(E_X^\perp, \omega'_X)$ et ω'_X et ω'_Y sont effectives sur $(E_X^\perp, \Omega')$. De plus $q_\omega(X, Y) = 0$. Ce qui est équivalent à $\Omega \wedge \omega_X \wedge \omega_Y = 0$ ou encore $\theta_X \wedge \omega_X \wedge \omega_Y = 0$ et $\theta_Y \wedge \omega_X \wedge \omega_Y = 0$. Dès lors, nécessairement $\omega_X \wedge \omega_Y$ s'écrit

$$\omega_X \wedge \omega_Y = \theta_X \wedge \omega_1 + \theta_Y \wedge \omega_2 + \theta_X \wedge \theta_Y \wedge \omega_3$$

et donc $\omega'_X \wedge \omega'_Y = 0$: ω'_Y est effective sur $(E_X^\perp, \omega'_X)$. On a montré ainsi la proposition suivante:

PROPOSITION 2.7 *Soit $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ et $X \in V$ tel que $q_\omega(X) \neq 0$. Il existe $Y \in E_X$ tel que:*

1. $\Omega(X, Y) = 1$
2. $E = E_X \oplus E_X^\perp$ *avec* $E_X^\perp = Ker(\theta_X) \cap Ker(\theta_Y)$
3. $(E_X^\perp, \omega'_X)$ *et* $(E_X^\perp, \Omega')$ *sont des espaces symplectiques de dimension* 4
4. ω'_X *et* ω'_Y *sont effectives sur* $(E_X^\perp, \Omega')$
5. Ω' *et* ω'_Y *sont effectives sur* $(E_X^\perp, \omega'_X)$

ω'_Y peut être hyperbolique, elliptique, parabolique ou nulle sur $(E_X^\perp, \omega'_X)$ tandis que Ω' ne peut être que hyperbolique ou elliptique puisque non dégénérée. Nous allons étudier chacun de ces huit cas.

2.3.1 ω'_Y est hyperbolique

D'après 2.1 il existe une base (E_1, E_2, F_1, F_2) de $E_X^\perp$ dans laquelle:

$$\begin{cases} \omega'_X = E_1^* \wedge F_1^* + E_2^* \wedge F_2^* \\ \omega'_Y = \lambda(E_1^* \wedge F_1^* - E_2^* \wedge F_2^*) \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Comme $\omega'_X \wedge \Omega' = (\lambda\omega'_X + +\omega'_Y) \wedge \Omega' = (\lambda\omega'_X - \omega'_Y) \wedge \Omega' = 0$ et $\Omega' \wedge \Omega' \neq 0$, Ω' s'écrit nécessairement

$$\begin{aligned} \Omega' &= pE_1^* \wedge E_2^* + rE_1^* \wedge F_2^* + qE_2^* \wedge F_1^* + sF_1^* \wedge F_2^* \\ &= E_1^* \wedge (pE_2^* + rF_2^*) + F_1^* \wedge (-qE_2^* + sF_2^*) \end{aligned}$$

avec $ps + qr \neq 0$.

Soit le changement de base

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = E_1 \\ \bar{f}_1 = F_1 \\ \mu\bar{e}_2 = \begin{cases} qE_2 - sF_2 & \text{si } ps+qr > 0 \\ -qE_2 + sF_2 & \text{si } ps+qr > 0 \end{cases} \\ \mu\bar{f}_2 = pE_2 + rF_2 \end{cases}$$

avec $\mu = \sqrt{|ps+qr|} \neq 0$. Dans cette base on a:

$$\begin{cases} \omega'_X = \bar{e}_1^* \wedge \bar{f}_1^* + \bar{e}_2^* \wedge \bar{f}_2^* \\ \omega'_Y = \lambda(\bar{e}_1^* \wedge \bar{f}_1^* - \bar{e}_2^* \wedge \bar{f}_2^*) \\ \Omega' = \mu(\bar{e}_1^* \wedge \bar{f}_2^* \pm \bar{e}_2^* \wedge \bar{f}_1^*) \end{cases}$$

Soit alors la base symplectique de (V, Ω) $(e_1 = X, e_2 = \mu\bar{e}_1, e_3 = \pm\mu\bar{e}_2, f_1 = Y, f_2 = \bar{f}_2, f_3 = \bar{f}_1)$. Dans cette base, d'après 2.2 $\omega = \omega_Y \wedge \theta_X - \omega_X \wedge \theta_Y$ s'écrit:

$$\omega = \frac{1}{\mu}(e_1^* \wedge e_2^* \wedge f_3^* \pm e_1^* \wedge e_3^* \wedge f_2^* + \lambda f_1^* \wedge e_2^* \wedge f_3^* \pm \lambda f_1^* \wedge e_3^* \wedge f_2^*)$$

Appliquons l'une après l'autre les deux transformations symplectiques suivantes:

$$\begin{cases} e_1 \mapsto \mu e_1 & f_1 \mapsto \frac{1}{\mu} f_1 \\ e_2 \mapsto e_2 & f_2 \mapsto f_2 \\ e_3 \mapsto e_3 & f_3 \mapsto f_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 + \frac{\lambda}{\mu^2} f_1 \mapsto -e_1 & e_1 - \frac{\lambda}{\mu^2} f_1 \mapsto \frac{\mu^2}{2\lambda} f_1 \\ e_2 \mapsto e_2 & f_2 \mapsto f_2 \\ e_3 \mapsto -f_3 & f_3 \mapsto e_3 \end{cases}$$

Dans la base symplectique finale ω s'écrit:

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + \nu f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \quad \nu \neq 0$$

2.3.2 ω'_Y est elliptique

1. Ω' est hyperbolique

   On applique le raisonnement précédent en intervertissant le rôle de ω'_Y et Ω': il existe une base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{f}_1, \bar{f}_2)$ de $E_X^\perp$ dans laquelle

   $$\begin{cases} \omega'_X = \bar{e}_1^* \wedge \bar{f}_1^* + \bar{e}_2^* \wedge \bar{f}_2^* \\ \Omega' = \lambda(\bar{e}_1^* \wedge \bar{f}_1^* - \bar{e}_2^* \wedge \bar{f}_2^*) & \lambda \neq 0 \\ \omega'_Y = \mu(\bar{e}_1^* \wedge \bar{f}_2^* - \bar{e}_2^* \wedge \bar{f}_1^*) & \mu > 0 \end{cases}$$

   Dès lors dans la base symplectique $(e_1 = X, e_2 = \lambda\bar{e_1}, e_3 = \lambda\bar{e}_2, f_1 = Y, f_2 = \bar{f}_1, f_3 = -\bar{f}_2)$ de (V, Ω) ω s'écrit:

   $$\omega = \frac{1}{\lambda}(e_1^* \wedge e_2^* \wedge f_2^* - e_1^* \wedge e_3^* \wedge f_3^* - \mu f_1^* \wedge e_2^* \wedge f_3^* - \mu f_1^* \wedge e_3^* \wedge f_2^*)$$

En appliquant successivement les trois transformations symplectiques

$$\begin{cases} e_3 \mapsto f_3, f_3 \mapsto -e_3 \\ e_2 \mapsto e_2 + e_3, f_2 \mapsto \frac{1}{2}(f_2 + f_3), e_3 \mapsto \frac{1}{2}(e_2 - e_3), f_3 \mapsto f_2 - f_3 \\ e_1 \mapsto \lambda e_1, f_1 \mapsto \frac{1}{\lambda} f_1 \end{cases}$$

ω s'écrit:

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge f_3^* + e_1^* \wedge e_3^* \wedge f_2^* + \frac{\mu}{\lambda} f_1^* \wedge e_3^* \wedge e_2^* + \frac{\mu}{\lambda} f_1^* \wedge f_3^* \wedge f_2^*$$

Posons alors $\frac{\lambda}{\mu} = \varepsilon \nu^2$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et considérons la transformation symplectique

$$e_2 \mapsto \begin{cases} \nu e_2 & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \nu e_3 & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases}, f_2 \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\nu} f_2 & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \frac{1}{\nu} f_3 & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases},$$

$$e_3 \mapsto \begin{cases} \nu e_3 & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \nu e_2 & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases}, f_3 \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\nu} f_3 & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \frac{1}{\nu} f_2 & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases},$$

Dans la base finale ω s'écrit:

$$\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*$$

2. Ω' est elliptique

Il existe une base (E_1, E_2, F_1, F_2) de $E_X^{\perp}$ dans laquelle

$$\begin{cases} \omega'_X = E_1^* \wedge F_1^* + E_2^* \wedge F_2^* \\ \omega'_Y = \lambda(E_1^* \wedge F_2^* - E_2^* \wedge F_1^*) \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$$

et comme $\Omega' \wedge \omega'_X = \Omega' \wedge \omega'_Y$ Ω' s'écrit:

$$\Omega' = pE_1^* \wedge E_2^* + qF_1^* \wedge F_2^* + r(E_1^* \wedge F_2^* + E_2^* \wedge F_1^*) + s(E_1^* \wedge F_1^* - E_2^* \wedge F_2^*)$$

Notons $\omega' = (p, q, r, s)$. Comme Ω' est elliptique $pq + r^2 + s^2 < 0$. Considérons pour $t \in \mathbb{R}$ les transformations symplectiques de $(E_X^{\perp}, \omega'_X)$ qui s'écrivent dans la base (E_1, E_2, F_1, F_2):

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_t et B_t laissent invariant ω'_X et ω'_Y et modifient Ω' de la façon suivante:

$$\begin{cases} (p, q, r, s) \overset{A_t}{\mapsto} (p - qt^2 - 2st, q, r, s + qt) \\ (p, q, r, s) \overset{B_t}{\mapsto} (p - qt^2 + 2rt, q, r - qt) \end{cases}$$

Appliquons alors B_{u_1} puis A_{t_1} avec $u_1 = \frac{r}{q}$ et $t_1 = \frac{-s}{q}$. Dans la base obtenue on a:

$$\begin{cases} \omega'_X = \bar{e}_1^* \wedge \bar{f}_1^* + \bar{e}_2^* \wedge \bar{f}_2^* \\ \omega'_Y = \lambda(\bar{e}_1^* \wedge \bar{f}_2^* - \bar{e}_2^* \wedge \bar{f}_1^*) \quad \lambda \neq 0 \\ \Omega' = p\bar{e}_1^* \wedge \bar{e}_2^* + q\bar{f}_1^* \wedge \bar{f}_2^* \qquad pq < 0 \end{cases}$$

Considérons alors le changement de base qui laisse invariant ω'_X et ω'_Y:

$$\bar{e}_1 \mapsto e^t \bar{e}_1, \bar{f}_1 \mapsto e^{-t} \bar{f}_1, \bar{e}_2 \mapsto e^t \bar{e}_2, \bar{f}_2 \mapsto e^{-t} \bar{f}_2$$

avec $e^{4t} = -\frac{q}{p} > 0$. Ω' s'écrit dans la nouvelle base:

$$\Omega' = \mu(\bar{e}_1^* \wedge \bar{e}_2^* - \bar{f}_1^* \wedge \bar{f}_2^*)$$

Dès lors dans la base symplectique $(e_1, = X, e_2 = \mu\bar{e}_1, e_3 = \mu\bar{f}_1, f_1 = Y, f_2 = \bar{e}_2, f_3 = -\bar{f}_2)$ ω s'écrit:

$$\omega = \frac{1}{\mu^2} e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - e_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^* - \frac{\lambda}{\mu} f_1^* \wedge e_2^* \wedge f_3^* - \frac{\lambda}{\mu} f_1^* \wedge f_2^* \wedge e_3^*$$

Appliquons alors la transformation symplectique

$$e_1 \mapsto \mu e_1, f_1 \mapsto \frac{1}{\mu} f_1, e_2 \mapsto \mu e_2, f_2 \mapsto \frac{1}{\mu} f_2$$

puis la transformation symplectique

$$e_2 \mapsto \nu e_2, f_2 \mapsto \frac{1}{\nu} f_2, e_3 \mapsto \frac{1}{\nu} e_3, f_3 \mapsto \nu f_3$$

avec $\frac{\mu}{\lambda} = \varepsilon \nu^2$, $\varepsilon = \pm 1$. On obtient:

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - e_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^* - \varepsilon f_1^* \wedge e_2^* \wedge f_3^* - \varepsilon \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge e_3^*$$

ce qui nous conduit à deux cas possibles en fonction de la valeur de ε:

$$\begin{cases} \omega = f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^* \\ \omega = -f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^* \end{cases}$$

REMARQUE 2.8 *Si on applique le symplectomorphisme*

$$\begin{cases} e_1 \leftrightarrow e_2 \\ f_1 \leftrightarrow f_2 \end{cases}$$

la forme $\omega = -f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*$ *devient la forme* $\omega = f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*$, *forme que l'on avait dejà obtenue dans le cas (ω'_Y elliptique, Ω' hyperbolique).*

2.3.3 ω'_Y est parabolique

Comme précédemment il existe une base (E_1, E_2, F_1, F_2) de $E_X^\perp$ dans laquelle:

$$\begin{cases} \omega'_X = E_1^* \wedge F_1^* + E_2^* \wedge F_2^* \\ \omega'_Y = E_1^* \wedge F_2^* \\ \Omega' = pE_1^* \wedge E_2^* + qE_1^* \wedge F_2^* + rF_1^* \wedge F_2^* + s(E_1^* \wedge F_1^* - E_2^* \wedge F_2^*) \end{cases}$$

avec $pr + s^2$. Considérons la transformation:

$$C_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C_t laisse invariant ω'_X et ω'_Y et transforme Ω' de la façon suivante:

$$(p,q,r,s) \overset{C_t}{\mapsto} (p,q,r-pt^2-2st, s+pt)$$

Soit t_0 tel que $r - pt_0^2 - 2st_0 \neq 0$ (t_0 existe puisque p, r et s ne sont pas tous les trois nuls). Ainsi quitte à appliquer C_{t_0} on peut supposer que $\Omega' = (p,q,r,s)$ avec $r \neq 0$ et $pr + s^2 \neq 0$. Dès lors quitte à changer F_1 en $F_1 - \frac{q}{r}E_1$ on peut supposer $q = 0$: $\Omega' = (p,0,r,s)$ avec $r \neq 0$ et $pr + s^2 \neq 0$. Si $p = 0$ appliquons alors C_{t_1} avec $t_1 = \frac{r}{2s}$: $\Omega' = (0,0,0,s)$.

Si $p \neq 0$ appliquons C_{t_2} avec $t_2 = -\frac{s}{p}$: $\Omega' = (p,0,r,0)$ puis la transformation

$$E_1 \mapsto \sqrt{|p|}E_1, F_1 \mapsto \frac{1}{\sqrt{|p|}}F_1, E_2 \mapsto \sqrt{|p|}E_2, F_2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{|p|}}F_2$$

Ω' devient $\Omega' = \pm(1,0,r,0)$, $r \neq 0$.

Finalement on aboutit à:

$$\begin{cases} \omega'_X = E_1^* \wedge F_1^* + E_2^* \wedge F_2^* \\ \omega'_Y = E_1^* \wedge F_2^* \\ \Omega' = \begin{cases} s(E_1^* \wedge F_1^* - E_2^* \wedge F_2^*) & s \neq 0 \\ \pm(E_1^* \wedge E_2^* + rF_1^* \wedge F_2^*) & r \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

ce qui nous conduit à deux expressions de ω possibles:

$$\begin{cases} \omega = f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \\ \omega = -f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \end{cases}$$

2.3.4 $\omega'_Y = 0$

Dans ce cas il existe une base (E_1, E_2, F_1, F_2) de $E_X^\perp$ dans laquelle

$$\begin{cases} \omega'_X = E_1^* \wedge F_1^* + E_2^* \wedge F_2^* \\ \Omega' = \begin{cases} \lambda(E_1^* \wedge F_1^* - E_2^* \wedge F_2^*) & \lambda \neq 0 \\ \lambda(E_1^* \wedge F_2^* - E_2^* \wedge F_1^*) & \lambda \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

ce qui nous conduit à deux expressions possibles de ω:

$$\begin{cases} \omega = f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* \\ \omega = f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* \end{cases}$$

2.4 Théorème de classification

On a ainsi décrit toutes les orbites possibles de ω. Le calcul de l'invariant q_ω montre qu'elles sont distinctes.

THEOREME 2.9 *Soit $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ une base symplectique d'un espace symplectique de dimension 6. Toute 3 forme effective sur V est $Sp(6)$- équivalente à une et une seule des formes listées ci-dessous:*

N^o	Forme	Invariant
1.	$e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + \gamma f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \gamma \neq 0$	$2q_\omega = \gamma(e_1^* f_1^* + e_2^* f_2^* + e_3^* f_3^*)$
2.	$f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*$ $+f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \nu \neq 0$	$2q_\omega = (e_1^*)^2 - (e_2^*)^2 + (e_3^*)^2$ $+\nu^2((f_1^*)^2 - (f_2^*)^2 + (f_3^*)^2)$
3.	$f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*$ $+f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* - \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \nu \neq 0$	$2q_\omega = -(e_1^*)^2 - (e_2^*)^2 - (e_3^*)^2$ $+\nu^2(-(f_1^*)^2 - (f_2^*)^2 - (f_3^*)^2)$
4.	$f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*$	$2q_\omega = (e_1^*)^2 - (e_2^*)^2 + (e_3^*)^2$
5.	$f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*$	$2q_\omega = -(e_1^*)^2 - (e_2^*)^2 - (e_3^*)^2$
6.	$f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*$	$2q_\omega = (e_1^*)^2$
7.	$f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*$	$2q_\omega = -(e_1^*)^2$
8.	$e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$	$2q_\omega = 0$
9.	0	$2q_\omega = 0$

TAB. 1: *Classification des 3-formes effectives en dimension 6*

3 Les stabilisateurs des orbites et leurs prolongations

3.1 Stabilisateur des différentes orbites

Notons $sp(V) = sp(6)$ l'algèbre de Lie de $Sp(V)$ et considérons l'action infinétisimale associée à l'action de $Sp(V)$ sur $\Lambda(V^*)$:

$$X.\omega = L_X\omega$$

pour $X \in sp(V)$ et $\omega \in \Lambda^k(V^*)$. Nous calculerons ici le stabilisateur des différentes orbites de notre classification:

$$\mathcal{J}_\omega = \{X \in sp(V) : \ L_X\omega = 0\}$$

Les formes considérées étant à coefficients constants, $L_X\omega = di_X\omega$. Par un calcul direct (effectué à l'aide de Mapple V par ordinateur) nous obtenons la proposition suivante:

PROPOSITION 3.1 *Les stabilisateurs des formes* 1 *à* 5 *sont:*

1. $\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + \gamma f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \ \gamma \neq 0$

$$\mathcal{J}_\omega = \{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B^t \end{pmatrix} : \ B \in sl(3,\mathbb{R})\}$$

2. $\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \ \nu \neq 0$

$$\mathcal{J}_\omega = \{\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \lambda_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \alpha & 0 & \gamma & \xi_1 & \lambda_2 & \xi_3 \\ -\beta & \gamma & 0 & \xi_2 & \xi_3 & \lambda_3 \\ -\nu^2\lambda_1 & \nu^2\xi_1 & -\nu^2\xi_2 & 0 & -\alpha & \beta \\ \nu^2\xi_1 & -\nu^2\lambda_2 & \nu^2\xi_3 & -\alpha & 0 & -\gamma \\ -\nu^2\xi_2 & \nu^2\xi_3 & -\nu^2\lambda_3 & -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} : \ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$$

3. $\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* - \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*$, $\nu \neq 0$

$$\mathcal{J}_\omega = \{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \lambda_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ -\alpha & 0 & \gamma & \xi_1 & \lambda_2 & \xi_3 \\ -\beta & -\gamma & 0 & \xi_2 & \xi_3 & \lambda_3 \\ -\nu^2\lambda_1 & -\nu^2\xi_1 & -\nu^2\xi_2 & 0 & \alpha & \beta \\ -\nu^2\xi_1 & -\nu^2\lambda_2 & -\nu^2\xi_3 & -\alpha & 0 & \gamma \\ -\nu^2\xi_2 & -\nu^2\xi_3 & -\nu^2\lambda_3 & -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$$

4. $\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*$

$$\mathcal{J}_\omega = \{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \lambda_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \alpha & 0 & \gamma & \xi_1 & \lambda_2 & \xi_3 \\ -\beta & \gamma & 0 & \xi_2 & \xi_3 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} : \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$$

5. $\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* - f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*$

$$\mathcal{J}_\omega = \{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \lambda_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \alpha & 0 & \gamma & \xi_1 & \lambda_2 & \xi_3 \\ \beta & -\gamma & 0 & \xi_2 & \xi_3 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} : \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0\}$$

Identifions ces stabilisateurs comme des sous algèbres de Lie classiques de $sp(6)$. Pour cela introduisons les isomorphismes d'algèbres de Lie réelles $\phi_{ij} : M_6(\mathbb{R}) \to M_6(\mathbb{R})$, $X \mapsto P_{ij} X P_{ij}^{-1}$ avec:

$$P_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{25} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P_{36} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit aussi pour $\lambda \neq 0$ l'isomorphisme d'algèbres de Lie $\phi_\lambda : M_6(\mathbb{R}) \to M_6(\mathbb{R})$ défini par:

$$\phi_\lambda(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} A & \lambda B \\ \frac{1}{\lambda} C & D \end{pmatrix}$$

Enfin notons $\phi : M_3(\mathbb{C}) \to M_6(\mathbb{R})$ le monomorphisme d'algèbres de Lie réelles:

$$\phi(A + iB) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Notons ω_i la i-ème forme de notre classification. Il est facile de constater que:

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{\omega_2} = \phi_\nu \circ \phi_{25} \circ \phi(su(2,1)) \\ \mathcal{J}_{\omega_3} = \phi_\nu \circ \phi(su(3)) \end{cases}$$

en prenant pour $su(3)$ la représentation:

$$su(3) = \{ \begin{pmatrix} i\lambda_1 & \alpha + i\xi_1 & \beta + i\xi_2 \\ -\alpha + i\xi_1 & i\lambda_2 & \gamma + i\xi_3 \\ -\beta + i\xi_2 & -\gamma + i\xi_3 & i\lambda_3 \end{pmatrix} : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \}$$

et en prenant pour $su(2,1)$ la représentation:

$$su(2,1) = \{ \begin{pmatrix} i\lambda_1 & \alpha + i\xi_1 & \beta + i\xi_2 \\ \alpha - i\xi_1 & i\lambda_2 & \gamma + i\xi_3 \\ -\beta + i\xi_2 & \gamma - i\xi_3 & i\lambda_3 \end{pmatrix} : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \}$$

En ce qui concerne la forme ω_4, le stablisateur s'écrit:

$$\mathcal{J}_{\omega_5} = \{ \begin{pmatrix} B & A \\ 0 & -B^t \end{pmatrix} : B \in so(2,1), A \in H_2(2,1) \}$$

où $H_2(p,q)$ désigne l'espace vectoriel des tenseurs quasi-harmoniques. $\mathcal{J}_{\omega_5}$ est l'algèbre de Lie produit semi-directe de $H_2(2,1)$ et de $so(2,1)$ sur l'homorphisme de Lie $\alpha : so(2,1) \to End(H_2(2,1))$ défini par:

$$\alpha(B)(A) = BA + AB^t$$

De la même façon $\mathcal{J}_{\omega_5}$ est le produit semi-direct de $H_2(1,2)$ et de $so(1,2)$ sur α. Enfin $\mathcal{J}_{\omega_1}$ est clairement isomorphe à $sl(3)$. Nous obtenons le tableau 2.

N^o	$\mathcal{J}_\omega$	Générateurs
1.	$sl(3,\mathbb{R})$	$\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} e_i^* f_j^*,\ b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0$
2.	$su(2,1)$	$\alpha(e_1^* f_2^* + e_2^* f_1^*) + \beta(e_1^* f_3^* - e_3^* f_1^*) + \gamma(e_2^* f_3^* + e_3^* f_2^*)$ $+\sum_{i=1}^{3} \lambda_i (e_i^{*2} + \nu^2 f_i^{*2}) + \xi_1(e_1^* e_2^* - \nu^2 f_1^* f_2^*) + \xi_2(e_1^* e_3^* + \nu^2 f_1^* f_3^*)$ $+\xi_3(e_2^* e_3^* - \nu^2 f_2^* f_3^*),\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
3.	$su(3)$	$\alpha(e_1^* f_2^* - e_2^* f_1^*) + \beta(e_1^* f_3^* - e_3^* f_1^*) + \gamma(e_2^* f_3^* - e_3^* f_2^*)$ $+\sum_{i=1}^{3} \lambda_i (e_i^{*2} + \nu^2 f_i^{*2}) + \xi_1(e_1^* e_2^* + \nu^2 f_1^* f_2^*) + \xi_2(e_1^* e_3^* + \nu^2 f_1^* f_3^*)$ $+\xi_3(e_2^* e_3^* + \nu^2 f_2^* f_3^*),\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
4.	$H_2(2,1) \rtimes_\alpha so(2,1)$	$\alpha(e_1^* f_2^* + e_2^* f_1^*) + \beta(e_1^* f_3^* - e_3^* f_1^*) + \gamma(e_2^* f_3^* + e_3^* f_2^*)$ $+\sum_{i=1}^{3} \lambda_i (e_i^{*2} + \nu^2 f_i^{*2}) + \xi_1 e_1^* e_2^* + \xi_2 e_1^* e_3^*$ $+\xi_3 e_2^* e_3^*,\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
5.	$H_2(1,2) \rtimes_\alpha so(1,2)$	$\alpha(e_1^* f_2^* + e_2^* f_1^*) + \beta(e_1^* f_3^* + e_3^* f_1^*) + \gamma(e_2^* f_3^* - e_3^* f_2^*)$ $+\sum_{i=1}^{3} \lambda_i (e_i^{*2} + \nu^2 f_i^{*2}) + \xi_1 e_1^* e_2^* + \xi_2 e_1^* e_3^*$ $+\xi_3 e_2^* e_3^*,\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$

TAB. 2: *Stabilisateur des 3-formes effectives en dimension 6*

Nous avons écrit les générateurs des stabilisateurs en les considérant comme des sous algèbre de Lie de $S^2(V^*)$ via l'identification canonique $h \in S^2(V^*) \leftrightarrow X_h \in sp(V)$, i.e. matriciellement via l'identification ([3]):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} B & -A \\ C & -B^t \end{pmatrix}$$

Remarquons que tous ces stabilisateurs sont des formes réelles différentes de $sl(3, \mathbb{C})$.

3.2 Prolongation des stabilisateurs

Intéressons nous maintenant à la prolongation de ces différents stabilisateurs. De facçn générale, la prolongation d'un sous espace vectoriel $\mathcal{J}$ de $Hom(V, W)$ est ([2]):

$$\mathcal{J}^{(1)} = \{T \in Hom(V, \mathcal{J} : \ Tuv = Tvu \ \forall \ u, v \in V\} = (W \otimes S^2(V^*)) \cap (\mathcal{J} \otimes V^*)$$

Dans notre cas $V = W$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\omega$ est un sous espace vectoriel de $sp(V)$. Un élément θ de $\mathcal{J}_\omega \otimes V^* \subset sp(V) \otimes V^* = V \otimes V^* \otimes V^*$ s'écrit:

$$\begin{aligned} \theta = \sum_{i,j,k=1}^{3} & b_{ij}^k e_i \otimes e_j^* \otimes e_k^* - a_{ij}^k e_i \otimes f_j^* \otimes e_k^* + c_{ij}^k f_i \otimes e_j^* \otimes e_k^* - b_{ji}^k f_i \otimes f_j^* \otimes e_k^* \\ & + b_{ij}^{k+3} e_i \otimes e_j^* \otimes f_k^* - a_{ij}^{k+3} e_i \otimes f_j^* \otimes f_k^* + c_{ij}^{k+3} f_i \otimes e_j^* \otimes f_k^* - b_{ji}^{k+3} f_i \otimes f_j^* \otimes f_k^* \end{aligned}$$

où pour $k = 1 \ldots 6$ $\begin{pmatrix} B_k & -A_k \\ C_k & -B_k^t \end{pmatrix} \in \mathcal{J}_\omega \subset sp(V)$. Or $\theta \in \mathcal{J}_\omega^{(1)}$ si et seulement si $\theta \in V \otimes S^2(V^*)$ i.e. si et seulement si pour $j, k = 1 \ldots 3$:

$$\begin{cases} \theta(e_j, e_k) = \theta(e_k, e_j) \\ \theta(f_j, f_k) = \theta(f_k, f_j) \\ \theta(e_j, f_k) = \theta(f_k, e_j) \end{cases}$$

Or:

$$\begin{cases} \theta(e_j, e_k) = \sum\limits_{i=1}^{3} b_{ij}^k e_i + c_{ij}^k f_i \\ \theta(f_j, f_k) = -\sum\limits_{i=1}^{3} a_{ij}^{k+3} e_i + b_{ji}^{k+3} f_i \\ \theta(e_j, f_k) = \sum\limits_{i=1}^{3} b_{ij}^{k+3} e_i + c_{ij}^{k+3} f_i \\ \theta(f_k, e_j) = -\sum\limits_{i=1}^{3} a_{ik}^{j} e_i + b_{ki}^{j} f_i \end{cases}$$

et donc $\theta \in \mathcal{J}_\omega^{(1)}$ si et seulement si pour $i, j, k = 1 \ldots 3$:

$$b_{ij}^k = b_{ik}^j \tag{1}$$

$$c_{ij}^k = c_{ik}^j \tag{2}$$

$$a_{ij}^{k+3} = a_{ik}^{j+3} \tag{3}$$

$$b_{ji}^{k+3} = b_{ki}^{j+3} \tag{4}$$

$$b_{ij}^{k+3} = -a_{ik}^j \tag{5}$$

$$b_{ki}^j = -c_{ij}^{k+3} \tag{6}$$

Ceci nous permet de déterminer au cas par cas les stabilisateurs des cinq premières formes de la classification en fonction des différentes formes possibles des matrices A_k, B_k et C_k caractérisant θ:

3.2.1 $\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + \gamma f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*,\ \gamma \neq 0.$

Dans ce cas là:

$$\mathcal{J}_\omega = \{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B^t \end{pmatrix} :\ tr(B) = 0\}$$

Donc pour $k = 1 \ldots 6$ $A_k = C_k = 0$. Dès lors d'après (5) et (6) $B_k = 0$ pour tout k. Ainsi:

$$\boxed{\mathcal{J}_\omega^{(1)} = 0}$$

3.2.2 $\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* - \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*,\ \nu \neq 0.$

Dans ce cas là:

$$\mathcal{J}_\omega = \{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & -\lambda_1 & -\xi_1 & -\xi_2 \\ -\alpha & 0 & \gamma & -\xi_1 & -\lambda_2 & -\xi_3 \\ -\beta & -\gamma & 0 & -\xi_2 & -\xi_3 & -\lambda_3 \\ \nu^2\lambda_1 & \nu^2\xi_1 & \nu^2\xi_2 & 0 & \alpha & \beta \\ \nu^2\xi_1 & \nu^2\lambda_2 & \nu^2\xi_3 & -\alpha & 0 & \gamma \\ \nu^2\xi_2 & \nu^2\xi_3 & \nu^2\lambda_3 & -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} :\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$$

Donc pour tout i et tout k $b_{ii}^k = 0$. Dès lors d'après (1) pour tout i et tout k $b_{ik}^i = 0$. Ainsi puisque B_k est antisymétrique pour tout k il vient:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} B_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus d'après (4) $b_{ki}^{i+3} = 0$ pour tout k et tout i. Donc:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_4 \\ 0 & -\gamma_4 & 0 \end{pmatrix} B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} B_6 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_6 & 0 \\ -\alpha_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Connaissant B_{k+3} pour $k = 1 \ldots 3$ on en déduit A_k d'après (5):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_6 \\ 0 & \beta_5 & 0 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_5 & 0 \\ -\gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or A_1, A_2 et A_3 sont symétriques. Donc $\beta_5 = \alpha_6 = -\gamma_4 = -\beta_5$. Et donc $\alpha_6 = \beta_5 = \gamma_4 = 0$ i.e. $A_k = B_{k+3} = 0$ pour $k = 1 \ldots 3$. De plus $C_k = \nu^2 A_k$. Donc $C_k = 0$ pour $k = 1 \ldots 3$. De la même façon connaissant B_k pour $k = 1 \ldots 3$ on en déduit C_{k+3} d'après (6):

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & -\beta_2 & 0 \end{pmatrix} C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} C_6 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc comme les matrices C_k sont symétriques on en déduit que $\beta_2 = \alpha_3 = -\gamma_1 = -\beta_2$. Et donc pour tout $k = 1 \ldots 3$ $B_k = C_{k+3} = 0$. De plus $A_{k+3} = \frac{1}{\nu^2} C_{k+3} = 0$. Finalement pour $k = 1 \ldots 6$ $A_k = B_k = C_k = 0$ i.e.:

$$\boxed{\mathcal{J}_\omega^{(1)} = 0}$$

Des calculs similaires montrent que $\mathcal{J}_\omega^{(1)} = 0$ pour les autres formes normales. Finalement:

N^o	$\mathcal{J}_\omega$	Générateurs	$\mathcal{J}_\omega^{(1)}$
1.	$sl(3,\mathbb{R})$	$\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} e_i^* f_j^*,\ b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0$	0
2.	$su(2,1)$	$\alpha(e_1^* f_2^* + e_2^* f_1^*) + \beta(e_1^* f_3^* - e_3^* f_1^*) + \gamma(e_2^* f_3^* + e_3^* f_2^*)$ $+\sum_{i=1}^{3} \lambda_i (e_i^{*2} + \nu^2 f_i^{*2}) + \xi_1(e_1^* e_2^* - \nu^2 f_1^* f_2^*) + \xi_2(e_1^* e_3^* + \nu^2 f_1^* f_3^*)$ $+\xi_3(e_2^* e_3^* - \nu^2 f_2^* f_3^*),\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$	0
3.	$su(3)$	$\alpha(e_1^* f_2^* - e_2^* f_1^*) + \beta(e_1^* f_3^* - e_3^* f_1^*) + \gamma(e_2^* f_3^* - e_3^* f_2^*)$ $+\sum_{i=1}^{3} \lambda_i (e_i^{*2} + \nu^2 f_i^{*2}) + \xi_1(e_1^* e_2^* + \nu^2 f_1^* f_2^*) + \xi_2(e_1^* e_3^* + \nu^2 f_1^* f_3^*)$ $+\xi_3(e_2^* e_3^* + \nu^2 f_2^* f_3^*),\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$	0
4.	$H_2(2,1) \rtimes_\alpha so(2,1)$	$\alpha(e_1^* f_2^* + e_2^* f_1^*) + \beta(e_1^* f_3^* - e_3^* f_1^*) + \gamma(e_2^* f_3^* + e_3^* f_2^*)$ $+\sum_{i=1}^{3} \lambda_i (e_i^{*2} + \nu^2 f_i^{*2}) + \xi_1 e_1^* e_2^* + \xi_2 e_1^* e_3^*$ $+\xi_3 e_2^* e_3^*,\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$	0
5.	$H_2(1,2) \rtimes_\alpha so(1,2)$	$\alpha(e_1^* f_2^* + e_2^* f_1^*) + \beta(e_1^* f_3^* + e_3^* f_1^*) + \gamma(e_2^* f_3^* - e_3^* f_2^*)$ $+\sum_{i=1}^{3} \lambda_i (e_i^{*2} + \nu^2 f_i^{*2}) + \xi_1 e_1^* e_2^* + \xi_2 e_1^* e_3^*$ $+\xi_3 e_2^* e_3^*,\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$	0

TAB. 3: *Prolongation des stabilisateurs des 3-formes effectives en dimension 6*

4 Classification symplectique locale des équations de Monge-Ampère

Nous avons établi une classification des différentes orbites symplectiques des opérateurs de Monge-Ampère à coefficients constants. Considérons maintenant ω_1 et ω_2 deux n-formes effectives sur T^*M, ω_1 étant à coefficients constants, et déterminons quand est-ce que ω_2 est localement dans l'orbite de ω_1 par rapport à l'action de $Sp(2n)$. Le problème étant local on peut supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et on cherche $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ symplectomorphisme local au voisinage de 0 tel que $F^*\omega_1 = \omega_2$.

Notons Ω la forme symplectique canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$. F existe si et seulement l'équation différentielle du premier ordre $\Sigma \subset J^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n}) = J^1(m, m)$ définie dans un voisinage de 0 par

$$\Sigma = \{[F]_x^1 :\ T_x F^*(\omega_{1,Fx}) - \omega_{2,x} = 0 \text{ et } T_x F^* \Omega_{Fx} - \Omega_x = 0\}$$

admet une solution au voisinage de 0.

Intéressons nous d'abord à l'intégrabilité formelle de cette équation différentielle. D'après le critère de Goldschmidt ([4]) si $\pi_{1,0} : \Sigma \to T^*M \times T^*M$ et $\pi_{2,1} : \Sigma^{(1)} \to \Sigma$ sont des fibrés vectoriels lisses et Σ est 2-acyclique alors Σ est formellement intégrable. Une équation différentielle $\Sigma \subset J^k(n, m)$ étant 2-acyclique si $H^{r,2}(\Sigma, \theta) = 0$ pour tout

$\theta \in \Sigma$ et tout $r \geq 0$, $H^{r,t}(\Sigma,\theta)$ désignant le groupe de cohomologie de Spencer de l'équation différentielle Σ (c.f. [1]):

$$H^{r,t}(\Sigma,\theta) = \frac{Ker(\delta : g^{(r)}(\theta) \otimes \Lambda^t(\mathbb{R}^n) \to g^{(r-1)}(\theta) \otimes \Lambda^{t+1}(\mathbb{R}^n))}{Im(\delta : g^{(r+1)}(\theta) \otimes \Lambda^{t-1}(\mathbb{R}^n) \to g^{(r)}(\theta) \otimes \Lambda^t(\mathbb{R}^n))}$$

Soit $(x,y) \in T^*M \times T^*M$. Il existe $\theta = [F]^1_x \in \Sigma$ tel que $\pi_{1,0}(\theta) = (x,y)$ si et seulement si il existe un symplectomorphisme $F : T_xT^*M \to T_yT^*M$ tel que $F^*\omega_{1,y} = \omega_{2,x}$. Dans ce cas là $\pi^{-1}_{1,0}(x,y)$ est le sous espace vectoriel des symplectomorphismes qui envoient $\omega_{1,y}$ sur $\omega_{1,x}$:

LEMME 4.1 *$\pi_{1,0} : \Sigma \to T^*M \times T^*M$ est un fibré vectoriel lisse au voisinage de $(0,0)$ si et seulement si pour tout x suffisamment petit $\omega_{2,x}$ est dans l'orbite de $\omega_{1,0}$.*

Supposons dorénavant que ω_2 satisfait à cette condition. Soit $\theta = [F]^1_x \in \Sigma$ et $h = (h_{ij}) \in g(\theta) \subset \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m$ où $g(\theta)$ est le symbole de Σ en θ. Soit $y = Fx$ et écrivons $\Sigma = \{F_1 = \ldots = F_p = G_1 = \ldots = G_q = 0\}$ avec:

$$\begin{cases} T_xF^*(\omega_{1,Fx}) - \omega_{2,x} = \sum\limits_i F_i([F]^1_x)\theta_i & (\theta_i)_i \text{ base de } \Lambda^n(T_xT^*M) \\ T_xF^*(\Omega_{Fx}) - \Omega_x = \sum\limits_j G_j([F]^1_x)\alpha_j & (\alpha_j)_j \text{ base de } \Lambda^2(T_xT^*M) \end{cases}$$

Par définition du symbole $g(\theta)$ de Σ on a pour tout r:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^m h_{ij}\frac{\partial F^i_r}{\partial x_j} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^m h_{ij}\frac{\partial G^i_r}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

Soit $\phi_t : J^1(m,m) \to J^1(m,m)$, $[G]^1_a \mapsto [G+th]^1_a$, $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ étant considérée comme l'application $h = (h_{ij})$. On a $\phi_t(\theta) = [F+th]^1_x$ et pour tout r:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0}\frac{F_r\circ\phi_t(\theta) - F_r(\theta)}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{G_r\circ\phi_t(\theta) - F_r(\theta)}{t} = 0 \end{cases}$$

et donc:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0}\frac{T_x(F+th)^*(\omega_{1,y_t}) - \omega_{2,x}}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{T_x(F+th)^*(\Omega_{y_t}) - \Omega_x}{t} = 0 \end{cases}$$

Soit:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0}\frac{T_x(F+th)^*(\omega_{1,y_t}) - T_xF^*\omega_{1,y}}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{T_x(F+th)^*(\Omega_{y_t}) - T_xF^*\Omega_y}{t} = 0 \end{cases}$$

Posons $V = T_yT^*M$ et soit X le champ de vecteur linéaire sur V de flot $T_x(F+th)$. Considérons ω_1 et Ω comme des formes linéaires sur V. D'après ce qui précède il vient $L_X\omega_1 = L_X\Omega = 0$. Or $L_X\Omega = 0$ si et seulement si $X = X_g$ avec $g \in C^\infty(V)$:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

D'où:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \Rightarrow A_{ij} = -D_{ji} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \Rightarrow B_{ij} = B_{ji} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \Rightarrow C_{ij} = C_{ji} \end{cases}$$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$ avec B et C symétriques, i.e. $X \in sp(2n)$. Et donc, comme $L_X \omega_1 = 0$, on en déduit que $X \in \mathcal{J}_{\omega_1}$, le stabilisateur de la forme linéaire ω_1. Remarquons en outre que matriciellement $X = h$. Ainsi $g(\theta)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{J}_{\omega_1}$. On a montré la proposition:

PROPOSITION 4.2 *Si au voisinage de 0 $\omega_{2,x}$ est dans l'orbite de $\omega_1 = \omega_{1,0}$ alors $\pi_{1,0} : \Sigma \to T^*M \times T^*M$ est un fibré vectoriel et le symbole de Σ s'identifie en tout point à un sous espace vectoriel du stabilisateur de ω_1.*

Remarquons que puisque la première prolongation $g^{(1)}(\theta)$ de $g(\theta)$ est

$$g^{(1)}(\theta) = (g(\theta) \otimes \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^m \otimes S^2(\mathbb{R}^m))$$

et que la première prolongation de $\mathcal{J}_{\omega_1}^{(1)}$ est

$$\mathcal{J}_{\omega_1}^{(1)} = (\mathcal{J}_{\omega_1} \otimes \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^m \otimes S^2(\mathbb{R}^m))$$

$g^{(1)}(\theta)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{J}_{\omega_1}^{(1)}$. Ainsi puisque dans notre cas $\mathcal{J}_{\omega_1}^{(1)} = 0$ alors $g^{(1)}(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \Sigma$ et en particulier Σ est 2-acyclique.

Etudions maintenant la projection $\pi_{2,1} : \Sigma^{(1)} \to \Sigma$ et de façon plus générale la projection $\pi_{k+2,k+1} : \Sigma^{(k+1)} \to \Sigma^{(k)}$. Remarquons tout d'abord qu'un élément $[F]_x^{k+1}$ est dans Σ si et seulement si

$$\begin{cases} [\omega_2 - F^*\omega_1]_x^k = 0 \\ [\Omega - F^*\Omega]_x^k = 0 \end{cases}$$

Soit $\theta = [F]_x^{k+1} \in \Sigma^{(k)}$. On cherche $\theta' \in \Sigma^{(k+1)}$ tel que $\pi_{k+2,k+1}(\theta') = \theta$. Nous allons modifier F à l'ordre $k+2$ pour déterminer si θ' existe. D'après le théorème de Darboux puisque $[\Omega - F^*\Omega]_x^k = 0$, il existe un symplectomorphisme $\tilde{F}$ tel que $[\tilde{F}]_x^{k+1} = [F]_x^{k+1}$. On peut donc supposer que F est symplectomorphisme. Posons $y = Fx$ et $\sigma_{k+1} = [\omega_1 - (F^{-1})^*\omega_2]_y^{k+1}$

1. Supposons qu'il existe un symplectomorphisme G sur $T^*M \times T^*M$ tel que $[\omega_1 - G^*\omega_2]_y^{k+1} = 0$ et $[G]_y^{k+1} = [F^{-1}]_y^{k+1}$. G s'écrit $G = F^{-1} \circ \eta$ où η est un symplectomorphisme vérifiant $[\eta]_y^{k+1} = 1$. Considérons le polynôme homogène de degré $k+2$ $P = [\eta]_x^{k+2} - id : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ et considérons le champ de vecteurs X sur $\mathbb{R}^{2n}$:

   $$X = \sum_{i=1}^{m} P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

   Le flot ϕ_t de X s'écrit:

   $$\phi_t = id + t\xi + t^2\xi_t$$

   Mais $\xi_i(u) = \frac{d}{dt}\phi_t^i(u) = P_i(\phi_t(u)) = P_i(u) + tQ(u)$. Et donc $\xi = P$. Soit ω une forme sur $\mathbb{R}^{2n}$:

   $$L_X\omega = \lim_{t \to 0} \frac{\phi_t^*\omega - \omega}{t} = \xi^*\omega + t \lim_{t \to 0} \xi_t^*\omega = \xi^*\omega = P^*\omega$$

En particulier $L_X\Omega = 0$ puisque $P^*\Omega = [\eta^*\Omega]_y^{k+1} - \Omega = 0$: X est un champ de vecteurs symplectique à coefficients polynômiaux homogènes de degrés $k+2$ donc il existe $h \in S^{k+3}(2n)$ tel que $X = X_h$. De plus:

$$\begin{aligned}
0 &= [\omega_1 - G^*\omega_2]_y^{k+1} \\
&= [\omega_1 - \eta^*(F^{-1})^*\omega_2]_y^{k+1} \\
&= [(1-\eta^*)\omega_1]_y^{k+1} + ([\eta^*]_y^{k+1})^*\sigma_{k+1} \\
&= -L_X\omega_1 + \sigma_{k+1}
\end{aligned}$$

Ainsi σ_{k+1} est dans l'image de l'application linéaire

$$c_{k+1} : S^{k+3}(\mathbb{R}^{2n}) \to S^{k+1}(\mathbb{R}^{2n}) \otimes \Lambda^n(\mathbb{R}^{2n}),\ h \mapsto L_{X_h}\omega_2$$

2. Réciproquement supposons que $\sigma_{k+1} = 0$ modulo $Im(c_{k+1})$: il existe un champ de vecteurs X à coefficients polynomiaux homogènes de degrés $k+2$ tel que

$$\begin{cases} L_X\Omega = 0 \\ L_X\omega_1 = \sigma_{k+1} \end{cases}$$

Soit $\eta = id + P : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ avec $X = \sum_{i=1}^{2n} P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Puisque $L_X\Omega = (id - \eta^*)\Omega = 0$, η est un symplectomorphisme. De plus $[\eta]_y^{k+1} = 1$ donc $[F^{-1}\circ\eta]_y^{k+1} = [F^{-1}]_y^{k+1}$. Enfin:

$$[\omega_1 - \eta^*(F^{-1})^*\omega_2]_y^{k+1} = [(1-\eta^*)\omega_1]_y^{k+1} + \sigma_{k+1} = -L_X\omega_1 + \sigma_{k+1} = 0$$

Donc $[F^{-1}\circ\eta]_y^{k+1} \in \Sigma^{(k+1)}$ et $\pi_{k+2,k+1}([F^{-1}\circ\eta]_y^{k+1}) = [F^{-1}]_y^k$.

Finalement $\pi_{k+2,k+1}^{-1}([F]_x^{k+1})$ est non vide si et seulement si $\sigma_{k+1} = 0$ modulo $Im(c_{k+1})$ et dans ce cas là $\pi_{k+2,k+1}^{-1}([F]_x^{k+1})$ est isomorphe à $Ker(c_{k+1})$. D'où la proposition:

PROPOSITION 4.3 *Si dans un voisinage de* 0 $[\sigma_0] = [\sigma_1] = 0$ *alors l'équation différentielle* Σ *est formellement intégrable.*

Supposons maintenant que $[\sigma_0(\omega_1,\omega_2)] = [\sigma_1(\omega_1,\omega_2)] = 0$ dans un voisinage de 0. Remarquons que le noyau de c_1 est l'ensemble des champs de vecteurs à coefficients polynômiaux homogènes de degrés 2 vérifiant $L_X\omega_1 = L_X\Omega = 0$ i.e. $Ker(c_1) = \mathcal{J}_{\omega_1}^{(1)} = 0$. Dès lors $\pi_{2,1} : \Sigma^{(1)} \to \Sigma$ est un difféomorphisme local. Soit C la distribution de Cartan sur $J^1(2n,2n)$: pour $\theta = [F]_x^1 \in J^1(2n,2n)$ $C(\theta)$ est le sous espace vectoriel de $T_\theta J^1(2n,2n)$ engendré par l'ensemble des $T_x J^1(G)$ où $[G]_x^1 = \theta$. Considérons la restriction de C à Σ: $D(\theta) = C(\theta) \cap T_\theta\Sigma$. Soit $\theta \in \Sigma$. Puisque $\pi_{2,1} : \Sigma^{(1)} \to \Sigma$ est un difféomorphisme on peut choisir F tel que $\theta = [F]_x^1$ et $[F]_x^2 \in \Sigma^{(1)}$. Soit $L = J^1(F)$ sous variété de $J^1(2n,2n)$. Soit G tel que $[G]_x^1 = \theta$. Si $[G]_x^2 \neq (F]_x^2$ alors $[G]_x^2 \notin \Sigma^{(1)}$ et donc $T_x J^1(G) \cap T_\theta\Sigma = 0$ puisque par définition de la prolongation $\Sigma^{(1)}$ de Σ, $[G]_x^2 \in \Sigma^{(1)}$ si et seulement si $T_x J^2(G) \subset T_\theta\Sigma$. . Dès lors:

$$D(\theta) = C(\theta) \cap T_\theta\Sigma = T_\theta L$$

La restriction D de la distribution de Cartan à Σ est donc complètement intégrable comme distribution dans $J^1(2n,2n)$. Donc d'après le théorème de Froebenius D est stable par le crochet de l'algèbre de Lie $Vect(J^2(2n, 2n))$. D est donc stable par le crochet de la sous algèbre $Vect(\Sigma)$. Et donc D est une distribution totalement intégrable de l'équation différentielle Σ. Ou de façon équivalente, Σ admet une solution exacte ([1]). Ce qui nous permet d'enoncer le théorème suivant:

THEOREME 4.4 *Soit une équation différentielle de Monge-Ampère symplectique en dimension 3 déterminée par une forme effective ω_2 vérifiant*

$$[\sigma_0(\omega_1, \omega_2)] = [\sigma_1(\omega_1, \omega_2)] = 0$$

pour l'une des 5 premières formes de la table 1 alors cette équation différentielle est symplectiquement équivalente à l'une des équations suivantes:

$$\lambda + hess(h) = 0, \qquad \lambda \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial q_3^2} + \nu^2 hess(h) = 0, \qquad \nu \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial q_3^2} - \nu^2 hess(h) = 0, \qquad \nu \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial q_3^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial q_3^2} = 0$$

où $hess(h)$ est le déterminant de la matrice hessienne de h.

Références

[1] Alekseevskil (D.V.), Vinogradov (A.M.), Lychagin (V.V): *Basic Ideas and Concepts of Differential Geometry* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol 28, Geometry I, 1988, Springer-Verlag

[2] Guillemin (V.) et Sternberg (S.): *An algebraic model of transitive differential geometry* Bull. Amer. Math. Soc., vol 1, 1964, p. 269-307

[3] Guillemin (V.) et Sternberg (S.): *Symplectic technics in Physic* Cambridge University Press, 1984

[4] Goldschmidt (H.): *Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations* J. Differential Geometry, vol 1, 1967, p. 269-307,

[5] Harvey (R.) et Lawson (H.B): *Calibrated Geometry* Acta. Math. 148, 1982, p. 47-157

[6] Igusa (J.I.): *A Classification of Spinors up to dimension Twelve* Amer. Math. Journ., vol 92, 1972, p. 997-1028

[7] Lychagin (V.V.): *Non-Linear Differential Equations and Contact Geometry* Uspeckhi Mat. Nauk., vol 34, 1979, p. 137-165, Russian; English transl. in Russian Math. Surveys, vol 34, 1979.

[8] Lychagin (V.V), Roubtsov (V.N) et Chekalov (I.V.): *A classification of Monge-Ampère equations* Ann. scient. Ec. Norm. Sup, 4^e série, t.26, 1993, p. 281-308

[9] Lychagin (V.V.) et Roubtsov (V.): *On Sophus Lie Theorems for Monge-Ampère Equations* Doklady Bielorrussian Academy of Science, vol 27, 5, p. 396-398, Russian

[10] Lychagin (V.V.) et Roubtsov (V.): *Local Classification of Monge-Ampère Equations* Soviet Math. Dokl., vol. 28, 2, 1983, p. 328-332

[11] Popov (V.): *Classification of Spinors of dimension* 14 Trans. Moscow Math. Soc., 1980, p. 181-232